دراسة نظرية لانتقال الحرارة بالحمل المختلط لجريان خلال فجوة حلقية أفقية

د. مكي حاج زيدان
مدرس

منار صالح مهدي
مدرس مساعد

قسم الهندسة الميكانيكية- جامعة تكريت

الخلاصة

تم في هذا البحث إجراء دراسة نظرية لانتقال الحرارة بالحمل المختلط لجريان الهواء خلال فجوة حلقية أفقية مسخنة بثبوت الفيض الحراري من الخارج. ومبردة من الداخل بثبوت درجة حرارة السطح تضمنت الدراسة النظرية التوصل إلى المعادلات الحاكمة للجريان وانتقال الحرارة لمقطع أفقي وهي معادلة الطاقة ومعادلة الزخم بالاتجاه القطري والمماسي ومعادلة الزخم بالاتجاه المحوري ومعادلة الدوامية باستعمال المعادلات الأساسية (الاستمرارية، الطاقة والزخم بالاتجاهات الثلاث) المتغيرات فيها درجة الحرارة ودالة الجريان والسرعة المحورية وتم تحويلها إلى الصيغة اللابعدية بدلالة عدد كراشوف، برانتل وعدد رينولدز وحلت عددياً باستخدام الطريقة الارتحالية وطريقة كاوس. استخرجت نتائج الحلول العددية بثبوت الفيض الحراري في منطقة تمام التشكيل الحراري ومثلت نتائج هذه الحلول لقيم مختلفة لعدد رالي بمخططات دالة الجريان ودرجة الحرارة وتوزيع قيم عدد نسلت الموضعية. أظهرت نتائج الحل العددي أن الجريان الثانوي الناتج عن الحمل الحر له تأثير واضح على تحسين انتقال الحرارة كلما زادت نسبة القطر الخارجي إلى الداخلي للفجوة الحلقية.

الكلمات الدالة

انتقال الحرارة، الحمل المختلط، فجوة حلقية، الفيض الحراري.

قائمة الرموز

الرموز	الدلالة	الوحدات
A	مساحة	m^2
a	نصف قطر الأسطوانة	m
B	ثابت في المعادلة (3e.3)	-
C	معامل تصحيح قيم عدد نسلت	-
c	السعة الحرارية	kJ/kg
D	القطر	m
g	التعجيل الأرضي	m/s^2
G	التعجيل الأرضي اللابعدي	-
h	معامل انتقال الحرارة	$W/m^2.K$
k_f	الموصلية الحرارية للمائع	W/m.K
k_w	الموصلية الحرارية للجدار	W/m.K
L	الطول	m
P	الضغط اللابعدي	-
Pw_f	عامل الجدار المحسن	-
Pz	هبوط الضغط بالاتجاه المحوري اللابعدي	-
P	الضغط	N/m^2
R	نصف قطر الأسطوانة اللابعدي	-
r	نصف قطر الأسطوانة	m
r_o	نصف قطر الأسطوانة الخارجية	m
r_i	نصف قطر الأسطوانة الداخلية	m
S	عامل التراخي	-
T	درجة الحرارة	K
t	الزمن	s
T_w	سمك الجدار	m

الرموز	الدلالة	الوحدات
u	مركبة السرعة بالاتجاه القطري (r)	m/s
v	مركبة السرعة بالاتجاه المماسي (ϕ)	m/s
W	السرعة اللابعدية بالاتجاه المحوري (z)	-
$\hat{W}$	السرعة اللابعدية باتجاه z ($\hat{W}$ =W/Pz)	-
$\langle W \rangle$	معدل السرعة المحورية	m/s
w	مركبة السرعة بالاتجاه z	m/s
Z	الإحداثي المحوري اللابعدي	-

المجموعة اللابعدية

الرموز	الدلالة	الوحدات
Gr	عدد كراشوف $\dfrac{g\beta\left((T_s)_z-(T_b)_z\right)D^3}{\nu^2}$	-
Gz	عدد كراتز $Re.Pr.\pi.D/4L$	-
Nu	عدد نسلت (h.D/k)	-
Pr	عدد برانتل (cp.μ/k)	-
Ra	عدد رالي (Gr.Pr)	-
Re	عدد رينولدز $\langle W \rangle D/\nu$	-

الرموز اليونانية

الرموز	الدلالة	الوحدات
β	معامل التمدد الحجمي	1/K
ν	اللزوجة الكينماتيكية (μ/ρ)	m^2/s
ζ	الدوامية اللابعدية	-
θ	درجة الحرارة اللابعدية	-
μ	اللزوجة الديناميكية	kg/m.s
ρ	الكثافة الكتلية	kg/m^3
τ	الزمن اللابعدي	-

الرموز	الدلالة	الوحدات
ϕ	الإحداثي المماسي	-
Ψ	دالة الجريان اللابعدية	-
ψ	دالة الجريان	m^2/s
Ω	الدوامية	1/s
∇	لبلاسين بالإحداثيات الأسطوانية اللابعدية	-

المقدمة

دراسة حالة انتقال الحرارة بين المائع وجدار قناة التوصيل التي يجري فيها لاقت اهتماماً متزايد نظراً لكثرة تطبيقاته الهندسية العملية، إذ يحتاج تصميم جميع أنواع المبادلات الحرارية ومحطات تحلية المياه الشمسية والمجمعات الشمسية المستخدمة في شتى المجالات معرفة معامل انتقال الحرارة بين جدار القناة والمائع.

إن اعتماد خواص المائع الفيزيائية على درجة الحرارة يؤثر على طبيعة جريانه داخل القنوات ويعقد عملية تخمين انتقال الحرارة وخاصة للجريان الطباقي، فإذ كان الجريان بطيئاً وبعدد رينولدز واطئ، فإن ظاهرة الطفو تكون واضحة أما إذ كان الجريان سريعاً وبعدد رينولدز عالي فيتلاشى تأثير هذه الظاهرة أي أن في حل مسائل الحمل القسري يمكن إهمال تأثير ظاهرة الطفو التي تنشأ نتيجة تغير كثافة المائع بسبب فرق درجات الحرارة بين الجدار والمائع[1].للحمل المختلط في الجريان البطيء دور كبير في تحسين عملية انتقال الحرارة وزيادة عدد نسلت بمقدار يصل إلى (2.5) مرة مقارنةً مع الحمل القسري الخالص، كما أن تأثيره يعجل من نمو الطبقة المتاخمة ويقصر منطقة الدخول الحرارية للجريان الداخلي [2].

أجرى Shannon وDepew [3] دراسة تجريبية لدراسة تأثير الحمل المختلط على انتقال الحرارة لجريان هواء خلال أنبوب أفقي مسخن بثبوت الفيض الحراري ولجريان طباقي، شملت الدراسة مدى من قيم عدد رينولدز تراوحت بين ($120<Re<2300$) ولمدى من قيم عدد كراشوف بين ($Gr>2.5\times10^5$). أظهرت الدراسة أن هناك تحسن في قيم عدد نسلت تصل إلى (2.5) مرة عن قيمه للحمل

القسري في منطقة التشكيل الحراري التام التطور، كما أوجد الباحثان عامل الحمل الحر اللابعدي ($Gr^{1/4}Pr^{1/4}/Nu(Gz)$) الذي يربط بين قيم أعداد كراشوف وبرانتل ونسلت لجريان قسري من جهة مع قيم عدد نسلت الناتجة وبزيادة قيمة هذا العامل عن (2) يظهر تأثير الحمل المختلط في زيادة قيمة عدد نسلت. قورنت هذه النتائج مع الدراسات المشابهة وحصل توافق جيد بينها.

أجرى الباحثان Bergles و Morcos [4] دراسة تجريبية تبين تأثير تغير خواص الموائع عند درجة الحرارة الغشائية الموضعية لحالة الجريان الطباقي في أنابيب أفقية مصنعة من مواد مختلفة ومسخنة بفيض حراري ثابت في منطقة تمام التشكيل الحراري، وقورنت النتائج مع نتائج دراسات تجريبية أخرى تحسب فيها الخواص عند درجة الحرارة الظاهرية الموضعية وبينت الدراسة بأن قيم عدد نسلت تزداد بزيادة عدد رالي. تم ربط عدد نسلت بمجموعتين من العوامل اللابعدية وهما عامل الجدار المحسن ($Pw_f=k_fD/k_wt_w$) والعامل (Ra) ربطت هذه العوامل مع عدد نسلت بمعادلة ارتباطيه تكون دقيقة لمدى من قيم عدد رالي ضمن ($3\times10^3<Ra<10^7$) وقيم عدد عامل الجدار المحسن بين ($2<Pw_f<66$) ولمدى من قيم عدد برانتل ($4<Pr<175$).

أنجز الباحث Khalaf [5] دراسة تجريبية وعددية تستقصي مجال انتقال الحرارة بالحمل المختلط لجريان ماء مساعد وطباقي في أنبوب مائل مسخن بثبوت الفيض الحراري. بينت النتائج الخاصة بتغير قيم عدد نسلت المعدل بتغير زوايا ميلان الأنبوب بأنه لا توجد قيمة عظمى لعدد نسلت عند زاوية ميل معينة للأنبوب تقع بين الموضعين الأفقي والشاقولي وأن القيمة العظمى لعدد نسلت تحصل عند الموضع الأفقي وتتناقص قيم عدد نسلت بزيادة ميلان الأنبوب بأتجاة الموضع الشاقولي كما تم ربط تغير قيم عدد نسلت المعدل بمعادلة ارتباطية مع تغير قيم عدد رالي ولزوايا ميلان مختلفة للأنبوب.

الدراسة الحالية تضمنت حلاً عددياً للمعادلات الحاكمة للجريان خلال الفجوة الحلقية الأفقية عن طريق اختيار الصيغ اللابعدية المناسبة وبالتالي الشروط المتاخمة الملائمة لتجنب حالة التباعد وعدم استقرار الحل والاستفادة من ميزة التطور الحاصل

فـي أجهـزة الحاسـوب لإنجـاز العمليـات التكراريـة المتداخلـة بوقـت قصـير وبالدقـة المطلوبـة. تم التركيز في هذه الدراسة على بيان دقة الحل العددي في وصف توزيـع درجـات الحـرارة والدواميـة خـلال الفجـوة الحلقيـة بتغيـر العوامـل الحاكمـة للجريـان ولمختلف نسب الأقطار إضافة إلى تغير قيم عدد نسلت الموضعي محيطياً وطبيعة تصرفه عند محيط الفجوة الخارجي.

الجانب النظري

تم استخدام الفرضيات الآتية لغرض تبسيط الحل العددي مع ملاحظة عدم الإخلال بالحل العام ودقته:

1-عدم وجود مصدر حراري (Heat Source).

2- عدم تغير قيم الحرارة النوعية والموصلية الحرارية واللزوجة بتغير درجات الحرارة.

3-سيصـار إلـى اعتمـاد افتـراض بوسنسـك (Boussinesq) إذ أن الكثافـة تعـد ثابتـة ماعدا في حد قوة الطفو لأن حركة المائع تعتمد على تغير الكثافة ولذلك يمكن وصف تغير كثافة المائع بالصيغة الآتية[6]:

$$\rho_f = \rho_w\left[1-\beta\left(T_w - T\right)\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

4-يمكن إهمال حد تبديد اللزوجة (Viscous Dissipation Term) في معادلة الطاقة للحالة المدروسة لكون المائع هواء والسرعة قليلة [7].

5-الجريان ثنائي البعد (r,ϕ) ومتناظر حول المستوي العمودي الذي يمر من مركز النظام، وبذلك يمكن دارسة جانب واحد.

بنـاءاً علـى الفرضـيات المـذكورة أعـلاه فـإن معادلـة الاسـتمرارية يمكـن التعبيـر عنهـا بالإحداثيات الاسطوانية كما يأتي:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

وتكـون معـادلات الـزخم بالإحـداثيات الأسـطوانية فـي الاتجاهـات (r) و (ϕ) و(z) على التوالي كالآتي:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}-\frac{v^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \phi}\right)-\rho g(\cos\phi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}+\frac{uv}{r}\right)=-\frac{\partial p}{r\partial \phi}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \phi}-\frac{v}{r^2}\right)+\rho g(\sin\phi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3b)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right) \quad \ldots \quad (3c)$$

وتأخذ معادلة الطاقة بالإحداثيات الأسطوانية الصيغة الآتية:

$$u\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}=k_f\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right]-w\frac{\partial T}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

يتم حذف حد الضغط من معادلتي الزخم باتجاهي (r,ϕ) بالتفاضل المتقاطع بين مركبتي الزخم. وإذا عرفنا دالة الجريان بالإحداثيات الأسطوانية كالآتي: $u=\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}$ و $v=-\frac{\partial \psi}{\partial r}$ بذلك تختزل معادلة الزخم إلى الصيغة الآتية:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial \Omega}{\partial r}-\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \Omega}{\partial \phi}\right]=\upsilon\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2}\right]+$$

$$g\beta\left[\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}+\sin\phi\frac{\partial T}{\partial r}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

لكون الحل المباشر لمعادلات القطع الناقص مرهقاً حسابياً تستخدم فرضية إضافة حد التغير مع الزمن إلى الجانب الأيسر من المعادلات (3a) و (3b) و(5) لتتحول من معادلات قطع ناقص إلى معادلات قطع مكافئ [8] وهي فرضية لا تخل

مجلة تكريت للعلوم الهندسية/المجلد 13/العدد 3/ تشرين الأول 2006

بالحل العام للمعادلات وتسهله إلى حد كبير، وعليه ستأخذ معادلة الزخم بالاتجاه المحوري (z) الشكل الآتي:

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \phi}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

وتأخذ معادلة الزخم بالاتجاه (r,ϕ) الشكل الآتي:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial \Omega}{\partial r}-\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial \Omega}{\partial \phi}\right]=\upsilon\left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2}\right]+$$

$$g\beta\left[\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}+\sin\phi\frac{\partial T}{\partial r}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

في حين تأخذ معادلة الطاقة الشكل الآتي:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial \phi}=k_f\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}\right]-w\frac{\partial T}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

مع ملاحظة أن معادلة الدوامية في الإحداثيات الأسطوانية تكون بالصيغة الآتية:

$$\nabla^2\psi=-\Omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\Omega=\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

وبتعريف العوامل اللابعدية الآتية:

$$W=\frac{w}{\langle W\rangle}\ \tau=\frac{\langle W\rangle}{a}t \quad , \qquad , \qquad R=\frac{r}{a}\ \Psi=\frac{\psi}{a\langle W\rangle} \quad ,$$

$$P=\frac{p}{\rho\langle W\rangle^2} \quad Z=\frac{z}{a} \quad , \qquad , \quad \zeta=\frac{a}{\langle W\rangle}\Omega \quad \theta=\frac{T-T_b}{\frac{2q''a}{k_f}} \quad ,$$

$$G=\frac{a}{\langle W\rangle^2}g$$

وتعويضها في معادلات الزخم والطاقة مع ملاحظة أن $\frac{\partial P}{\partial Z}=P_z$ وبتبسيطها ينتج:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}+\frac{1}{R}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}\frac{\partial W}{\partial R}-\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial W}{\partial \phi}\right]=-P_z+\frac{1}{Re}\nabla^2 W \quad \ldots\ldots. \quad (11)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}\frac{\partial \zeta}{\partial R}-\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)=\frac{1}{Re}\nabla^2\zeta+$$

$$\frac{2NuGr}{Re^2}\left[\frac{\cos\phi}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \phi}+\sin\phi\frac{\partial \theta}{\partial R}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

يهمل انحدار الكثافة المحوري لكون انحدار الضغط ثابت على طول محور الفجوة لذلك:

$$W=\hat{W}P_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

بتقسيم معادلة (11) على (P_z) وتعويض معادلة (12) فيها ينتج.

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \tau}=-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}\frac{\partial \hat{W}}{\partial R}-\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \hat{W}}{\partial \phi}\right]-1+\frac{1}{Re}\nabla^2\hat{W} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

بما أن معدل السرعة يبقى ثابتاً فإن انحدار الضغط (P_z) يأخذ صيغة التكامل الآتي:

$$P_z=\left[\pi/\int_0^{\pi}\int_0^{1}\hat{W}RdRd\phi\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ينفذ التكامل الثنائي أعلاه باستخدام قاعدة سمبسون حيث يتم ضرب السرعة في كل عقدة شبكية بقيمة نصف قطر تلك العقدة ومن ثم إجراء التكامل الثنائي وكالآتي:

$$P_z=\left[\pi/\int_0^{\pi}\int_0^{1}(F(R,\phi)dR)d\phi\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

أما معادلة الطاقة بعد تعويض العوامل اللابعدية فيها والتبسيط فتصبح:

$$\therefore \frac{\partial\theta}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\frac{\partial\theta}{\partial R}-\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\theta}{\partial\phi}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\nabla^2\theta-\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}W \quad \dots \ (17)$$

الظروف المتاخمة

إن الظروف المتاخمة للمعادلات الحاكمة للجريان تشتق من الفرضيات التي اشتقت على أساسها هذه المعادلات وهي كون الجريان على التخوم غير انزلاقي. فالشروط الحدودية لدالة الجريان والسرعة المحورية.

$$\Psi(1,\phi,z_F)=\hat{W}(1,\phi,z_F)=0$$

$$\Psi(R,0,z_F)=\frac{\partial\Psi}{\partial R}(1,0,z_F)=\frac{\partial\hat{W}}{\partial\phi}(R,0,z_F)=0$$

$$\Psi(R,\pi,z_F)=\frac{\partial\Psi}{\partial R}(1,\pi,z_F)=\frac{\partial\hat{W}}{\partial\phi}(R,\pi,z_F)=0$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial R}(1,\phi,z_F)=\frac{\partial\Psi}{R\partial\phi}(1,\phi,z_F)=0$$

والشروط الحدودية للدوامية

$$\zeta(R,0,z_F)=0 \quad , \quad \zeta(R,\pi,z_F)=0$$

أما الشروط الحدودية لدرجة الحرارة:

$$\theta(1,\phi,z_F)=\frac{1}{2\mathrm{Nu}} \quad , \quad \frac{\partial\theta}{\partial\phi}(R,0,z_F)=0 \quad , \quad \frac{\partial\theta}{\partial\phi}(R,\pi,z_F)=0$$

الحل العددي للمعادلات الحاكمة للجريان

تقسم منطقة الجريان المحددة بالإحداثيات القطبية (R,ϕ) كما مبين بالشكل (1ب) إذ تكون التقسيمة الواحدة بالأبعاد الآتية $(\Delta R\times\Delta\phi)$. أن عدد التقسيمات الشبكية في هذه الحالة سيكون $(mt\times nt)$ في حين ستكون[[(mt+1)×(nt+1)]] من العقد الشبكية وذلك لنصف منطقة الجريان لوجود ظاهرة تماثل الجريان حول المحور الشاقولي للفجوة. يمكن الحصول على الحل بدلالة درجة الحرارة ودالة الجريان

والدوامية والسرعة المحورية من الحل العددي للمعادلات الحاكمة مع الشروط الحدودية المرتبطة معها باستخدام طريقة الفروقات المحددة.

وبعد تحويل المعادلات التفاضلية إلى جبرية بصيغة الفروقات المحددة والتبسيط نحصل على معادلات الطاقة والزخم بالاتجاه المحوري و(R,ϕ) الآتية:

$$\therefore \theta_{m,n}^{k+1} = \left| -t1 + \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}(t2 - W_{m,n}) \right|^{k} \Delta\tau + \theta_{m,n}^{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$\hat{W}_{m,n}^{k+1} = \left| -t4 - 1 + \frac{t3}{\mathrm{Re}} \right|^{k} \Delta\tau + \hat{W}_{m,n}^{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\zeta_{m,n}^{k+1} = \left| -t5 + \frac{t6}{\mathrm{Re}} + t7\frac{2\mathrm{NuGr}}{\mathrm{Re}^2} \right|^{k} \Delta\tau + \zeta_{m,n}^{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

حساب عدد نسلت الموضعي

يحسب عدد نسلت من المعادلة الآتية:

$$\mathrm{Nu}_{\phi} = \frac{hD}{k_f} = -\left.\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_o} \frac{D}{(T_w - T_b)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

وبدلالة القيم اللابعدية لنصف القطر ودرجة الحرارة فإن عدد نسلت الموضعي يحسب من انحدار درجات الحرارة على الجدار الخارجي وبالصيغة الآتية:

$$\mathrm{Nu}_{n}^{k} = \frac{\left.\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{mt,n}^{k}}{\theta_{mt}^{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

تم تقريب المشتقة على الجدار $\left.\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{mt,n}^{k}$ بالفرق الخلفي ذي الثلاث نقاط:

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial R}\right)_{mt,n}^{k} = \frac{1}{2\Delta R}\left[3\theta_{mt,n}^{k} - 4\theta_{mt-1,n}^{k} + \theta_{mt-2,n}^{k}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

بما أنه يمكن حساب قيم (θ_{mt}) عند موقع الزمن (k) من متوسط قيم عدد نسلت حول محيط الفجوة الخارجي ومن الداخل بعد نهاية خطوة الموقع (k) لذلك يمكن التعبير عنها بالصيغة الآتية:

$$\theta_{mt}^{k+1} = \frac{1}{2Nu^k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

بذلك يحسب عدد نسلت الموضعي من المعادلة آلاتية:

$$Nu_{nt}^{k+1} = \frac{Nu^k}{\Delta R}\left[3\theta_{mt,n}^{k} - 4\theta_{mt-1,n}^{k} + \theta_{mt-2,n}^{k}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

يتم حساب قيم عدد نسلت المعدل لمحيط الفجوة الحلقية عند الموقع (k) بإجراء عملية التكامل لعدد نسلت الموضعي المحيطي بالطريقة الآتية:

$$Nu^{k+1} = SNu^k + (1-S)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} Nu_{nt}^{k+1} d\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

يستخدم عدد نسلت لحساب درجة حرارة السطح عند الموقع (k+1) وتم استخدام عامل تراخي تحتي مقداره (0.8) لضمان استقرار الحل[8].

البرنامج الحاسبي

تم حل معادلات الطاقة والزخم التفاضلية الجزئية ذات القطع المكافئ بالاتجاه(R,ϕ) ومعادلة الزخم بالاتجاه المحوري ومعادلة دالة الجريان ذات القطع الناقص عددياً باستخدام الطريقة الواضحة (Explicit Method) والفرق المركزي باتجاه (R,ϕ). تم افتراض قيم كل من درجة الحرارة ودالة الجريان والدوامية والسرعة المحورية في جميع العقد الشبكية تساوي صفراً كشرط ابتدائي.

إن معادلة دالة الجريان حلت عددياً باستعمال الفرق المركزي وطريقة كاوس سيدال النقطية التعويضية في جميع العمليات التكرارية وتم صياغة البرنامج بحيث أن قيم (Ψ) لموقع الزمن (k) تعوض حالما تتوفر في معادلات الزخم والطاقة في نفس العملية التكرارية لحساب قيم الدوامية ودرجة الحرارة والسرعة المحورية والتي تعد كشروط ابتدائية لموقع الزمن التالي (k+1). الحل يبدأ بالتكرار الأول مستفيدين من الشروط الابتدائية حيث يتم حساب دالة الجريان وعند اكتماله توجد باقي المتغيرات

مجلة تكريت للعلوم الهندسية/المجلد 13/العدد 3/ تشرين الأول 2006

وقيم عدد نسلت الموضعي بالاتجاه (ϕ) ومعدله الذي يعد كشرط حدي للعمليات التكرارية اللاحقة، ثم يستمر التكرار حتى تصل قيمة عدد نسلت محاذية لقيمته في العملية التكرارية السابقة بنسبة (0.1%) ثم يتوقف البرنامج الحاسبي.

النتائج والمناقشة

الحل العددي لمعادلات الزخم (18و 19) والطاقة (20) لجريان المائع خلال فجوة حلقية مثلث بعدد من المخططات الكنتورية باستخدام برنامج الرسم (Tic plot) وشملت مخططات لدالة الجريان وخطوط تساوي درجة الحرارة لمقطع عرضي لحقل الجريان ولقيم مختلفة لعددي رالي ورينولدز في منطقة تمام التشكيل الحراري والهيدروليكي، ولقيم مختلفة لعدد رالي بثبوت قيم عدد رينولدز لبيان هيئة الجريان الثانوي ولتوضيح تأثير تغير الفيض الحراري المسلط على جدار الفجوة وكما مبين بالأشكال (2 و 3الجانب الأيسر) لأعداد رالي تتراوح من (1×10^4) إلى (1×10^5) وعند نسبة الأقطار (**2** و **3**). من الشكل (4) يمكن ملاحظة إن خطوط الجريان تكون متماثلة حول المحور الأفقي عند أعداد رالي الواطئة وأن مركز الجريان الثانوي يقع على المحور الأفقي، وعند زيادة عدد رالي فان هذا التماثل يتلاشى وينسحب مركز الجريان الدوامي أعلى المحور الأفقي للفجوة الحلقية وتميل خطوط دالة الجريان قليلاً مع المحور الشاقولي.

يتكون الجريان الثانوي من حركة المائع المحاذي للجزء الأسفل من الجدار الخارجي إذ أنه عند اكتسابه للحرارة من الجدار الساخن ينتقل باستمرار إلى أعلى الفجوة وبمحاذاة الجدار في حين يجري باستمرار المائع البعيد البارد باتجاه الأسفل بمحاذاة الجدار السفلي الخارجي من الجهتين ونتيجة تسخينه وتأثير قوى الطفو يستمر بحركته باتجاه الأعلى محاذياً للجدار لتشكل دوامتين متماثلتين حول المحور وعلى جانبي الجدار الداخلي لتشكلان نواتان للجريان الدوامي الثانوي.

عند القيم العالية لعدد رالي فان جريان المائع الحار الزاحف على الجدار الخارجي للفجوة في جزئه الأسفل يكون من الشدة بحيث يستطيع دفع مركز الجريان

الثانوي إلى الأعلى ويجعله فوق المحور الأفقي. إن هذه الظاهرة تشتد بزيادة قيم عدد رالي وتضعف بتناقص قيمه لامتلاء الجزء الأسفل من الفجوة بالمائع البارد وهذا يؤدي إلى انتقال مركز الجريان الثانوي من أسفل المحور الأفقي إلى أعلى المحور الأفقي، ويظهر إن مركز الجريان الثانوي أو ما يسمى بالعين تكون بعيدة من الجدار عند قيم عدد رالي الواطئة (1×10^4) كما هو مبين في الشكل (2) وتقترب عين الجريان تدريجياً من جدار الفجوة الخارجي بزيادة قيم عدد رالي .

المخططات الكنتورية لخطوط تساوي درجة الحرارة لقيم مختلفة لعدد رالي موضحة بالشكل (2 الجانب الأيمن)، ويتبين أن هذه الخطوط تكون عبارة عن دوائر متحدة المركز تقريباً مع مركز الفجوة الحلقية عند قيم عدد رالي الواطئة لضعف تأثير تيارات الجريان الثانوي وأن انتقال الحرارة بالتوصيل هو السائد خلال طبقات المائع ويبدأ عدم تماثل خطوط تساوي درجة الحرارة حول المحور الأفقي بزيادة قيم عدد رالي إذ يصعد التيار الحار للمائع المحاذي للجدار نتيجة الحمل الحر إلى الأعلى وينزل التيار البارد نحو الأسفل نتيجة الجريان الثانوي. يوضح الشكل (3) هذا التباين الكبير بدرجات الحرارة بين أسفل وأعلى الفجوة الحلقية للقيم العالية لعدد رالي وتزداد شدة هذا التباين بدرجات الحرارة بزيادة قيم عدد رالي مما يحفز انتقال الحرارة بالحمل بمركبتي السرعة المماسية والقطرية والذي يسبب زيادة بانتقال الحرارة. برسم مخطط لخطوط دالة الجريان وخطوط تساوي درجة الحرارة لقيم عدد رينولدز (200 و 300 و 400) وبثبوت قيم عدد رالي عند ($1*10^5$) يمكن معاينة الجريان الثانوي لدراسة تأثير تغير السرعة المحورية للمائع عن طريق تغير قيم عدد رينولدز كما مبين في الشكلين (4 و 5) ولنسبة الأقطار (2 و 4). الجانب الأيسر من هذه المخططات يبين خطوط دالة الجريان لقيم مختلفة لعدد رينولدز ، فعند القيم الواطئة لهذا العدد يظهر تأثير شدة جريان المائع الحار الزاحف على الجدار الخارجي للفجوة في جزئه الأعلى والذي يكون باستطاعته سحب مركز الجريان الثانوي إلى الأعلى مما يجعل مركزه فوق المحور الأفقي. بزيادة قيم عدد رينولدز يزحف مركز الجريان الثانوي قليلً إلى مركز المحور الأفقي لامتلاء الجزء المحاذي للجدار الداخلي بالمائع البارد. كما

مجلة تكريت للعلوم الهندسية/المجلد 13/العدد 3/ تشرين الأول 2006

يلاحظ إن عين الجريان الثانوي تكون قريبة جداً من الجدار الخارجي للفجوة الحلقية. المخططات الكنتورية لخطوط تساوي درجة الحرارة لقيم مختلفة لعدد رينولدز تراوحت بين (200 إلى 400) موضحة بالأشكال (4 إلى 5 الجانب الأيمن)، إذ يبين الشكل (4– ج) أن هذه الخطوط تكون اقرب إلى دوائر متحدة المركز تقريباً مع مركز الفجوة الحلقية ومضغوطة وقريبة من جدار الخارجي للفجوة عند قيم عدد رينولدز العالية لضعف تأثير الحمل الحر على حقل الجريان وأن انتقال الحرارة بالحمل القسري هو السائد ضمن هذا المدى لقيم عدد رينولدز. يبدأ تشوه خطوط درجة الحرارة وعدم تماثلها حول المحور الأفقي للفجوة بتناقص قيم عدد رينولدز حيث يصعد التيار الحار للمائع المحاذي للجدار نتيجة الحمل الحر إلى الأعلى وينزل التيار البارد نحو الأسفل كما موضح في الشكل(4– أ) ويظهر هذا التباين بدرجات الحرارة بين أسفل وأعلى الفجوة الحلقية للقيم الواطئة لعدد رينولدز وتزداد شدة التباين بدرجات الحرارة بتناقص قيمه.

يبين الشكلان (6 و 7) تغير القيم الموضعية لعدد نسلت محيطياً للفجوة الحلقية بنسبة قطر (4) و(2) على التوالي وبثبوت قيمة عدد رالي عند (50000) وقيمة عدد رينولدز عند (100). يتبين من الشكل (6) أن قيمة عدد نسلت الموضعي تبدو قليلة عند قمة الفجوة الحلقية ثم تزداد لتأخذ قيمتها العظمى عند الزاوية المحصورة بين ($40 > \phi > 30$) ثم تقل باتجاه الجزء الأسفل من الفجوة. ويعود سبب انخفاض قيمة عدد نسلت الموضعي عند القمة إلى التقاء تياري الهواء الحار الصاعد من كلا الجانبين ونشوء منطقة ساكنة من المائع بين التيارين عند قمة الفجوة الحلقية. تتزايد قيمة عدد نسلت الموضعي عند الابتعاد نزولاً من القمة حتى تصل إلى أعلى قيمة لها وسبب التزايد يعود إلى اصطدام تيار الهواء البارد والمساق بالجريان الثانوي واقترابه من جدار الخارجي للفجوة نتيجة دورانه واتجاهه إلى الأسفل وأزاحته لكتلة الهواء الحار المحاذية لجدار الفجوة الخارجي وعند الابتعاد عن هذه المنطقة نزولاً فان الطبقة المتاخمة الحرارية تكون من السمك بحيث تقلل إلى حد كبير تأثير سرعة الجريان الثانوي على انتقال الحرارة للمنطقة المحصورة بين عين الجريان الثانوي والجدار. أما الشكل (7) فيلاحظ عند قمة الفجوة الحلقية أن قيمة عدد نسلت الموضعي تكون

مجلة تكريت للعلوم الهندسية/المجلد 13/العدد 3/ تشرين الأول 2006

واطئة لكون المائع في هذه المنطقة يكاد يكون ساكناً وتسمى هذه المنطقة بنقطة الركود العليا ويعود سبب انخفاض قيمة عدد نسلت فيها إلى ضعف شدة الدوامية من جهة ولكون الطبقة المتاخمة الحرارية بلغت من السمك بحيث أصبحت عائقاً لانتقال الحرارة. عند الابتعاد عن قمة الركود العليا باتجاه الأسفل نقترب من منطقة مقابلة لمركز دوامة الجريان الثانوي فتحدث زيادة بقيمة عدد نسلت الموضعي ولكن بشدة اقل من الحالة الأولى وبمنطقة ابعد محيطياً عن قمة الفجوة وذلك لزيادة نسبة تأثير مركبتي السرعتين المماسية والقطرية في هذه المنطقة نتيجة حصر خطوط الجريان بين مركز الدوامة والجدار الخارجي المسخن. عند الابتعاد عن هذه المنطقة والاقتراب من منطقة الركود السفلى تتناقص قيمة عدد نسلت الموضعي إلى أدنى مستوى لها لكون المائع ساكن لوقوعه بين تيارين منفرجين. أن موقع أعلى قيمة لعدد نسلت الموضعي تتحرك محيطياً إلى الأعلى والأسفل اعتماداً على قيمة عدد رالي وعلى قيمة نسبة الأقطار.

الاستنتاجات

1. حل العددي للمعادلات الحاكمة للجريان يمكن أن يغطي مدى واسعاً من قيم أعداد رالي في حالة استخدام قيم عدد نسلت المعدل كشرط حدي لكل عملية تكرارية لتجنب حدوث حالة التباعد وعدم الاستقرار في الحل لقيم عدد رالي التي تكون ($Ra>10^5$).

2.عند أعداد رالي الواطئة (10^4) عين الجريان الثانوي تكون قريبه من مركز الفجوة الحلقية والمحور الأفقي ويكون أكثر قرباً من الجدار الخارجي وأعلى المحور الأفقي عند أعداد رالي العالية (**10^5**).

3.عند أعداد رينولدز الواطئة ($Re \leq 200$) ينتج عن لجريان الثانوي تبايناً في توزيع درجات حرارة المائع بين قمة وأسفل الفجوة مع إزاحة درجة حرارة العظمى إلى المنطقة المحاذية لقمة الفجوة الحلقية.

4. يزداد التباين بقيم عدد نسلت المحوري محيطياً بزيادة نسبة القطر الخارجي إلى الداخلي.

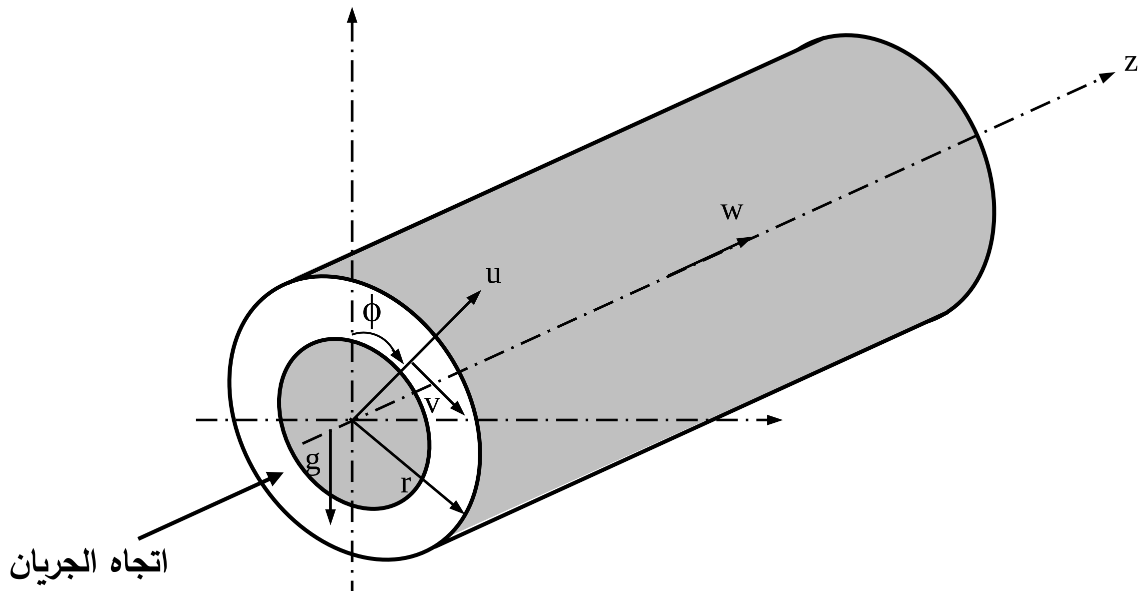
5. يقل تباين درجات الحرارة عند قيم عدد رينولدز العالية $(Re \geq 400)$ لقلة تأثير الحمل الحر المحمول من قبل الجريان القسري ويكون توزيع درجات الحرارة محيطياً اقرب إلى شكل الدوائر المتحدة المركز.

المصادر

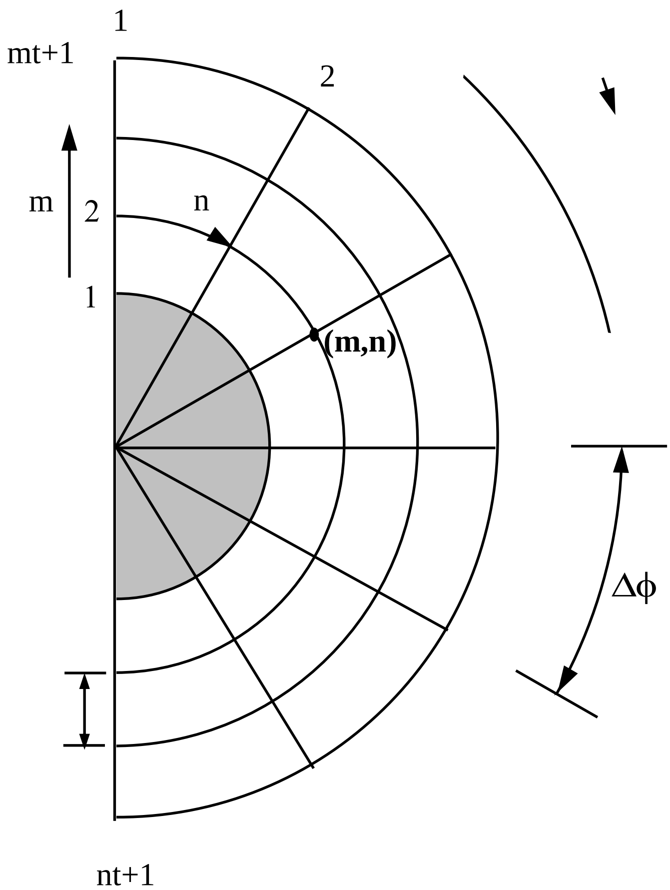
1. Anderson, D. H., Tannehill, J. C. and Plecher, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere. Washington, DC 1984.
2. Bejan, A, "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons, Inc., 1984.
3. Shannon, R. L. and Depew, C. A., "Combined Free and Forced Laminar Convection in a Horizontal Tube with Uniform Heat Flux", Trans. ASME, J. of Heat 353-357, (August 1968).
4. Morcos Transfer, pp., S. M. and Bergles, A. E., "Experimental Investigation of Combined Forced and Free Laminar Convection Heat Transfer in Horizontal Tubes", Trans. ASME, J. of Heat Transfer, pp.212-219, (May 1975).
5. Khalaf, M. H. Z., "Heat Transfer by Mixed Convection for a Flow Through an Inclined Circular tube", Ph D. Thesis, University of Technology (2004)
6. Kays, W. M., "Convective Heat Mass Transfer", Mc-Graw Hill, Inc., 1966.
7. Teertstra, P. and Yovanovich, M. M., "Comperhensive Review of Natural Convection in Horizontal Circular Annuli",

www.mhtl.uwaterloo.ca,1998.

8. Nguyen, C. T., Roy, G., Landry, M. A. and Maiga, S. E. B., "Transient Laminar Mixed Convection Flow in a Vertical Tube Under High Gr Number Condition", Faculty of Engineering University de Moncton, N. B., Canada EIA 3E9, (2002).



أ

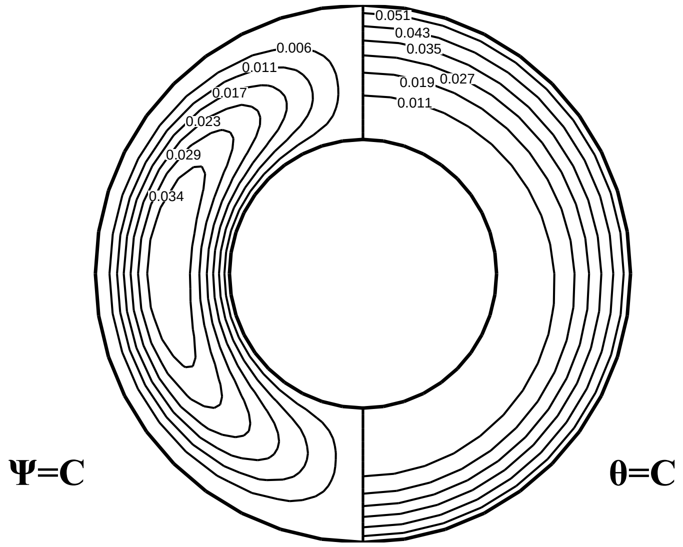


ب

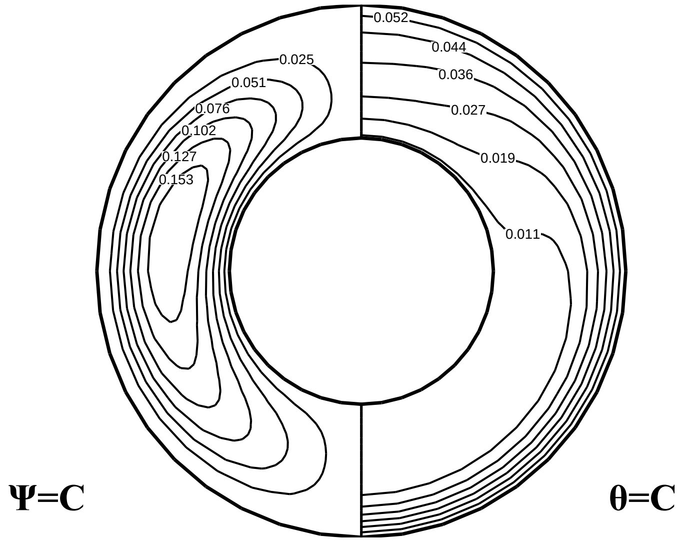
شكل (1)

(أ) التمثيل الفيزيائي للمسألة بالإحداثي القطبي،

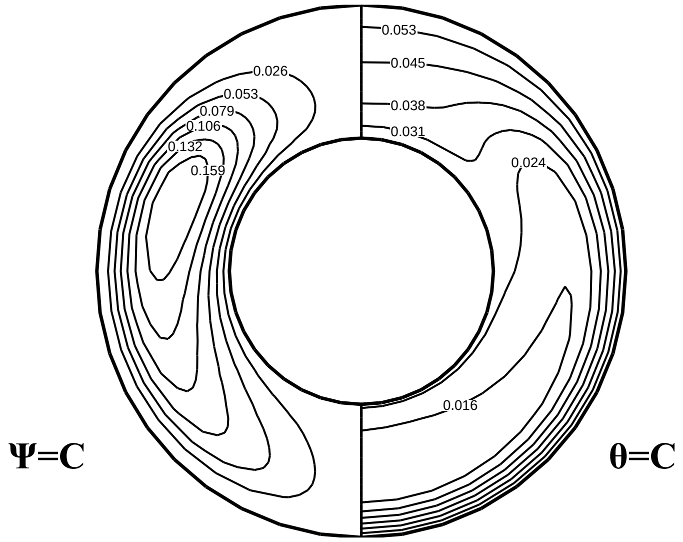
(ب) التمثيل الشبكي لمنطقة الجريان



أ

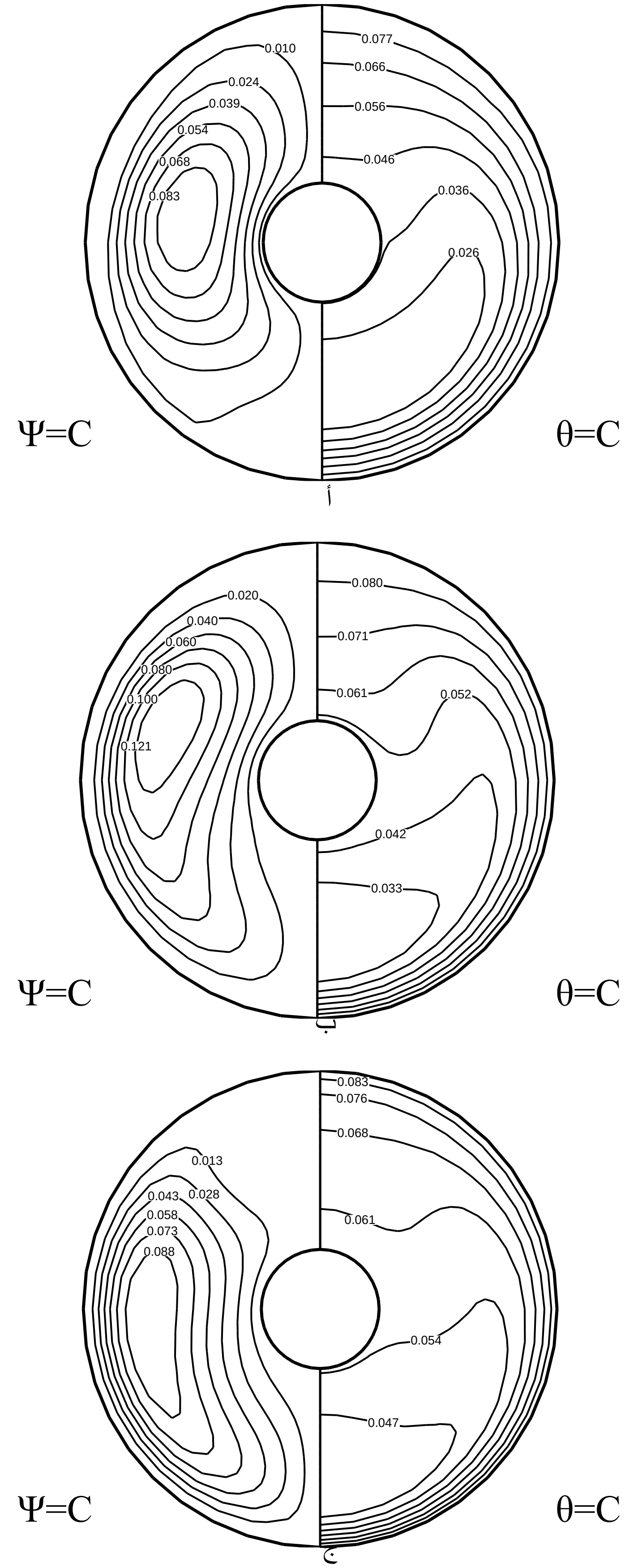


ب

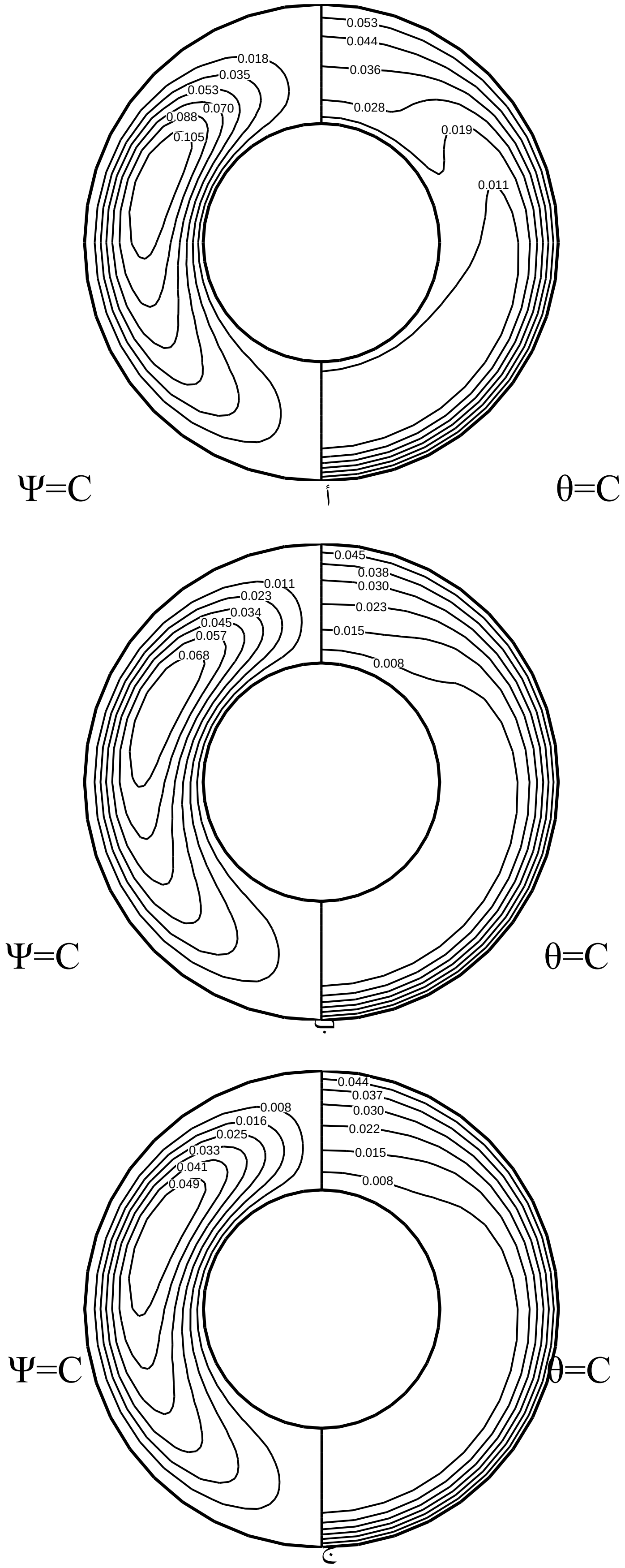


ج

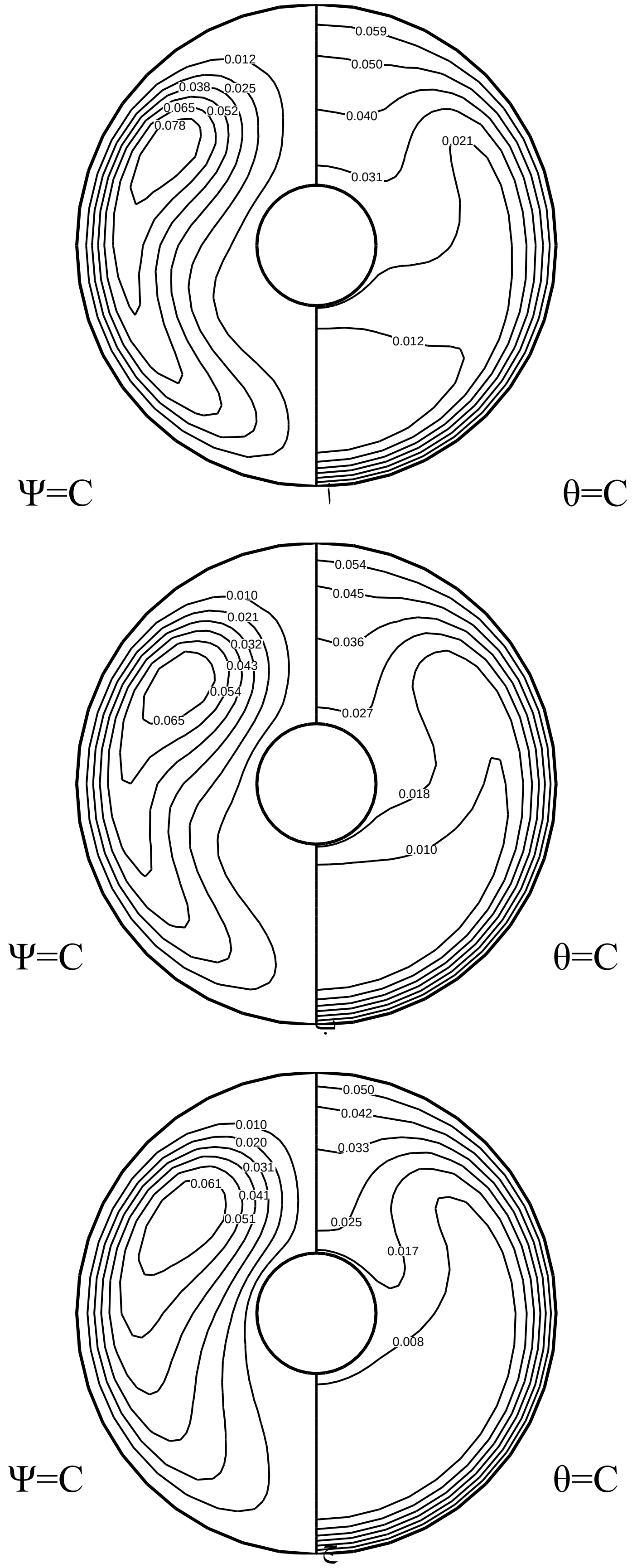
شكل (2)المخطط الكنتوري لدالة الجريان وخطوط تساوي درجة الحرارةعندما $r_o/r_i=2$ بثبوت (Re=100) وتغير أ ($Ra=1*10^4$)، ب ($Ra=0.5*10^5$)، ج ($Ra=1*10^5$).



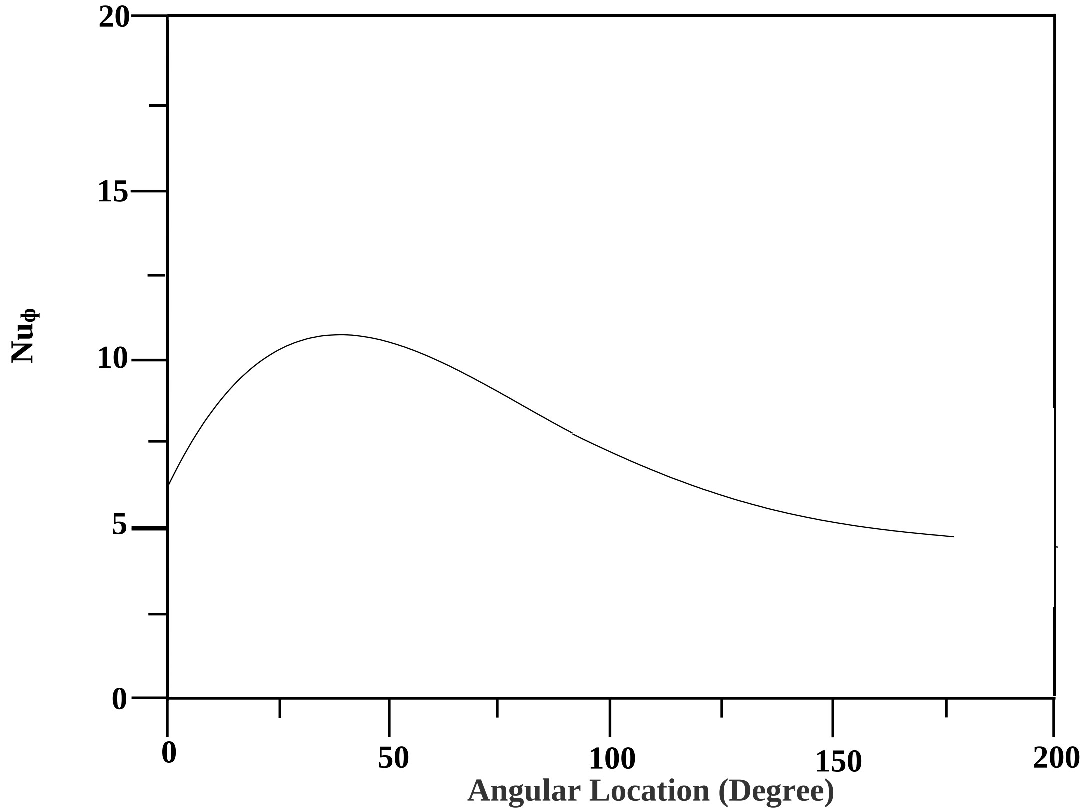
شكل (3)المخطط الكنتوري لدالة الجريان وخطوط تساوي درجة الحرارةعندما $r_o/r_i=4$ بثبوت (Re=100) وتغير أ ($Ra=1*10^4$) ، ب ($Ra=0.5*10^5$)، ج ($Ra=1*10^5$).



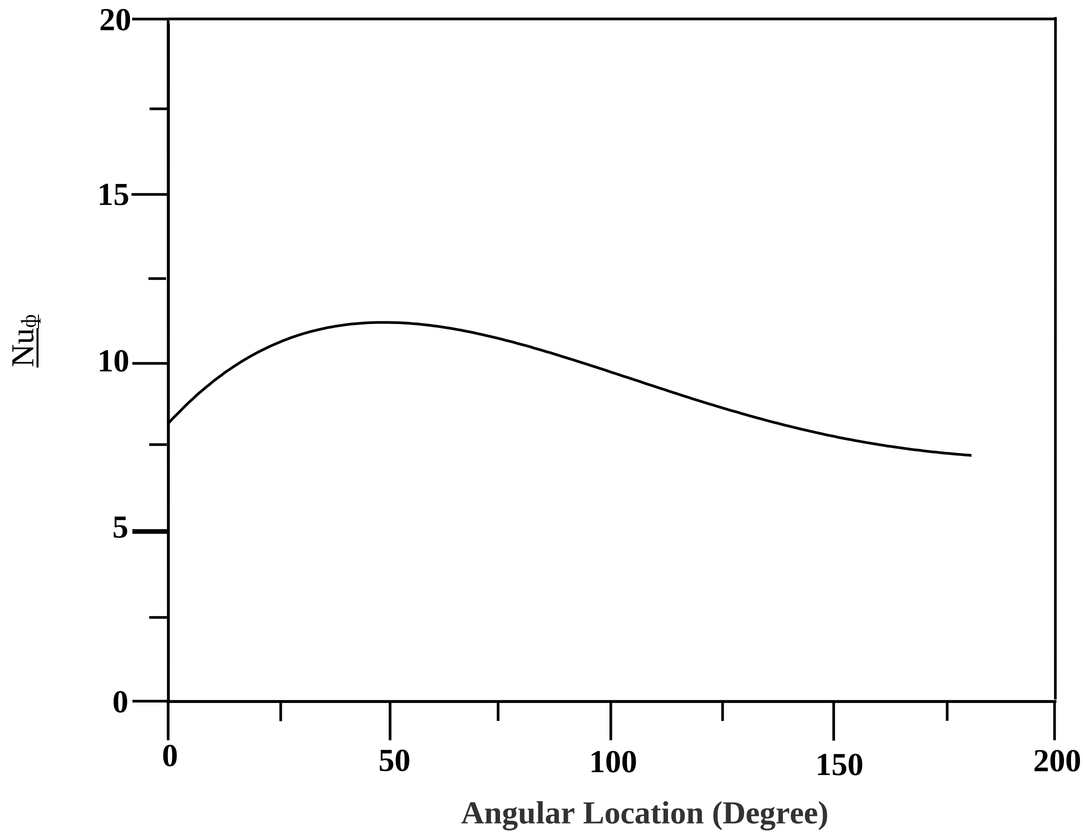
شكل (4) المخطط الكنتوري لدالة الجريان وخطوط تساوي درجة الحرارة عندما $r_o/r_i=2$ بثبوت($Ra=1*10^5$) وتغير أ (Re=200) ، ب (Re=300)، ج (Re=400).



شكل (5) المخطط الكنتوري لدالة الجريان وخطوط تساوي درجة الحرارة عندما $r_o/r_i=4$ بثبوت($Ra=1*10^5$) وتغير أ ($Re=200$)، ب ($Re=300$)، ج ($Re=400$).



شكل (6) تغير عدد نسلت على محيط الأنبوب (Ra=50000) و $r_o/r_i=4$



شكل (7) تغير عدد نسلت على محيط الأنبوب (Ra=50000) و $r_o/r_i=2$

A THEORETICAL STUDY ON MIXED CONVECTION IN A HORIZONTAL ANNULUS

Dr. Maki H. Khalaf **Manar S. Mahdi**

Lecturer **Ass. Lecturer**

Mechanical Eng. Dept. - Tikrit University

ABSTRACT

A theoretical study has been conducted on mixed convection heat transfer of the flow through a horizontal annulus the outer surface heated with an axial uniform heat flux while the inner surface cooled at constant surface temperature. Theoretically the governing equations for a flow were reduced to four equations, which are continuity equation, radial and tangential momentum equation, axial momentum equation and vorticity equation in which the variables were the temperature, vorticity, stream function and axial velocity. These equations were reduced to dimensionless equations in which Reynolds, Prandtl and Rayleigh numbers were presented. These equations were solved numerically by using the marching process explicit finite difference method and Gauss elimination technique after changing the elliptic type energy and momentum equations to parabolic form by adding the change with time for each variable to the left hand side of these equations.

Numerical results for the annuli heated by a uniform heat flux in the fully developed region were obtained and represented by stream function contours and isotherms for different values of

Rayleigh and circumferential distribution of local Nussult number. The results were based on the fact that the secondary flow created by natural convection has significant effects on the heat transfer process, and reveal an increase in the Nussult number values as the heat flux increases in the horizontal position.

KEY WORDS

Heat Transfer, Mixed Convection, Horizontal Annulus, Heat Flux.